

DOI: 10.16285/j.rsm.2023.0852

竖井地基大应变非线性固结解析解

王亦炀, 李传勋, 李 阔, 陆向综

(江苏大学 土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 已有的研究表明, 高压缩性软土的大应变及非线性固结特性对其固结具有显著影响。但目前能同时考虑两者影响的竖井地基大应变非线性固结解析解还鲜见报道。考虑高压缩性软土在固结中的大变形特性, 应用双对数压缩渗透非线性模型描述软土在固结中的压缩渗透特性变化, 基于 Gibson 大应变固结理论, 建立竖井地基大应变非线性固结模型并获得模型的解析解。将所获得的解析解与竖井地基大应变非线性固结数值解及特定工况下小应变线性固结解析解进行对比, 以验证所获解析解的可靠性。在此基础上, 通过大量计算对不同工况下竖井地基非线性固结性状开展分析。结果表明: 压缩指数 I_c 为定值时竖井地基固结速率随参数 α 减小而增大。 α 保持不变时竖井地基固结速率随 I_c 减小而增大。压缩渗透参数保持不变时, 竖井地基固结速率随着外荷载的增大而加快, 随着井径比增大而减慢。将所获解析解应用于深港西部通道口岸区填海地基处理的工程计算, 表明理论计算的沉降曲线与实测曲线较为吻合, 说明了所获解析解的工程可应用性。

关 键 词: 竖井地基; 非线性; 大应变; 变荷载; 解析解

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2024) 05-1446-11

Analytical solutions for large-strain nonlinear consolidation of soils with vertical drain

WANG Yi-yang, LI Chuan-xun, LI Kuo, LU Xiang-zong

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

Abstract: The large strain and nonlinear consolidation characteristics of soft soils with high compressibility have obvious effects on their consolidation, but few analytical solutions for large-strain nonlinear consolidation of soils with vertical drains have been reported in the literature. By considering the large deformation characteristics of soft soils with high compressibility during consolidation, a large-strain nonlinear consolidation model of soils with vertical drains is developed and an analytical solution for this consolidation model is obtained based on Gibson's large deformation consolidation theory, in which a double logarithmic nonlinear compressibility and permeability model is adopted to describe the variation of the compressibility and permeability of soft soils. The proposed analytical solutions are compared with the numerical solutions of large-strain nonlinear consolidation of soils with vertical drains and the analytical solutions of small-strain linear consolidation under specific conditions to verify its reliability. On this basis, the nonlinear consolidation properties of soils with vertical drains under different conditions are analyzed by extensive calculations. The results show that the consolidation rate increases with decreasing the permeability parameter α , when the compression index I_c keeps constant. The consolidation rate increases with decreasing the compression index I_c , when the permeability parameter α remains constant. The consolidation rate of soils with vertical drains increases with an increase in external load, and decrease with an increase in the ratio of influential zone radius to vertical drain radius when the compressibility and permeability parameters remain constant. Finally, the proposed analytical solution is applied to the reclaimed foundation treatment project of Shenzhen Western Corridor boundary control point (BCP). The settlement curve calculated by proposed solutions is in good agreement with the measured curve, which further illustrates the engineering applicability of the proposed analytical solution.

Keywords: soils with vertical drains; nonlinearity; large strain; time-dependent loading; analytical solution

收稿日期: 2023-06-17

录用日期: 2023-08-22

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 42377183)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (42377183).

第一作者简介: 王亦炀, 男, 1999 年生, 硕士研究生, 主要从事竖井排水固结方面的研究工作。E-mail: 222223023@stmail.uj.su.edu.cn

通讯作者: 李传勋, 男, 1978 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程方面的教学和科研工作。E-mail: lichuanxun@yeah.net

1 引言

在现代地基处理方案中, 竖井地基排水固结技术因其实效性而受到广泛关注。它主要通过打入塑料排水板形成高效的竖向排水结构, 以此加快软土层的固结进程。早在 Barron^[1]的工作中, 确立了竖井地基在等应变和自由应变状态下的固结基本方程, 并分别提供了两种状态下径向固结问题的解析解决方案。后续研究中, Hansbo 等^[2]在其基础上引入了涂抹效应和井阻分析, 使理论更加贴近实际工况。谢康和^[3]在此基础上进一步细化, 提出了一套实用性更强的竖井地基固结解析理论, 并在我国相关地基处理规范中得到应用。刘加才团队^[4]聚焦于多层土层分布的实际情况, 针对性地提出了成层竖井地基固结的有效解决方案。刘忠玉等^[5]结合土体流变特性, 创新性地开发了竖井地基流变固结计算方法。

软土的非线性压缩和渗透属性使其成为固结研究的一大挑战。Basak 等^[6]首先将软土非线性固结性质引入竖井地基固结理论, 针对瞬态荷载下的非线性固结问题进行了先驱性探索。此后, Lekha 等^[7]运用孔隙比 e 、有效应力 σ' 和渗透系数 k 构建基础的 $e - \lg \sigma'$ 和 $e - \lg k$ 模型, 解决了等应变条件下竖井地基的非线性固结问题。Indraratna 等^[8]在吸收前人成果的同时, 考虑涂抹效应, 得出了更为准确的非线性固结解析结果。郭彪等^[9]关注径向与竖向耦合渗流, 针对不同渗透假设制定了砂井地基的非线性固结答案。张玉国等^[10]研究了变荷载与软土非线性相互作用在真空预压工艺中的固结现象。Lu 等^[11]综合多项复杂因素, 发展了涵盖多种加载方式和渗流条件的竖井地基非线性固结解析法。许滨华等^[12]和王洁等^[13]分别从谱方法和井阻随时间和空间变化角度对竖井地基非线性固结问题进行了有益拓展。

然而, 传统的小应变固结理论在模拟高压缩性软土孔压消散过程中存在局限性, 故有学者引入大变形固结理论。Gibson 等^[14]借助拉格朗日坐标和流动坐标的概念, 建立了一维大变形固结方程, 全面考虑了几何非线性、土体非线性压缩、重力效应以及渗透性变化等因素。江辉煌等^[15]将这一理论应用于深圳填海软土地基的固结分析, 特别是在自由应变假设下, 推出了针对深港通道口岸淤泥地基的大变形固结方程。张明等^[16]研究了双层砂井地基在大变形条件下的固结控制方程, 揭示了不同初始孔压分布对固结效率的影响。曹玉鹏等^[17]在等应变条件

下, 发展了包含堆载效应和负压梯度衰减特点的大应变固结模型, 尤其适用于疏浚泥地基研究。Nguyen 等^[18]探讨了竖井地基在井阻衰减及水平渗透系数非线性变化时的非线性大应变固结特性。李阔等^[19]建立了能反映井阻随时间和空间变化的竖井地基大应变非线性固结模型, 并获取了数值解。王军等^[20]通过试验验证了一种针对排水板堵塞问题的创新真空预压法的实用价值。

尽管当前竖井地基大应变非线性固结领域的理论体系已经趋于完善, 但应当指出, 现有理论解决方案主要倚重于复杂的数值计算手段而非直观易懂的解析表达。鉴于数值计算方法对实际工程人员的理解难度较大且需要较高的专业技术背景, 研发竖井地基大应变非线性固结问题的解析求解技术显得尤为迫切, 这不仅对理论研究有深远影响, 而且对工程实践具有显著的应用价值。同时, 现行普遍采用的 $e - \lg \sigma'$ 和 $e - \lg k$ 非线性压缩和渗透模型, 并不能充分捕捉高压缩性软土如吹填淤泥这类特殊土体的复杂物理行为。试验数据显示, Butterfield^[21]提出的双对数压缩渗透模型 $\lg(1+e) - \lg \sigma'$ 和 $\lg(1+e) - \lg k$ 能够更精确地模拟此类土体的非线性压缩特性^[22-23]。而仇超等^[24]在归纳整理大量淤泥和软土样本的非线性压缩及渗透试验数据后进一步证实, 这种双对数模型不仅对高度可压缩的软土表现出了卓越的适应性, 即使对于压缩性较低的土质, 该模型依然能够有效适用并展现良好的描述效能。

本文将 $\lg(1+e) - \lg \sigma'$ 和 $\lg(1+e) - \lg k$ 双对数压缩渗透关系引入竖井地基大应变固结理论中, 考虑涂抹及井阻效应, 构建了以超静孔压为变量的竖井地基大应变非线性固结模型, 并成功推导出了该模型在 4 种主流加载模式下的精确解析解。为了确保所得解析解的准确性, 将其与已知的数值解进行了严谨比对验证, 结果显示二者之间高度一致, 从而有效地证明了新模型解析解的正确性。在此基础上, 进一步就压缩渗透参数、外部荷载等多种重要因素对竖井地基固结特性的影响进行了深度剖析。将本文所创制的固结模型及其解析解答切实应用于实际的软土地基处理工程实例中, 发现在优化固结过程、提高地基稳定性等方面展现出良好的应用效果。

2 非线性大应变固结模型

图 1 为拉格朗日坐标系和流动坐标系下竖井地基单个竖井单元计算简图。其中 r 为在拉格朗日坐标下记初始时刻的径向坐标, r_c 为单井排水影响区的等效半径, r_s 为单井涂抹区半径, r_w 为竖井半径,

有效应力原理可得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) = \frac{I_c}{\sigma'_0} \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma'} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (7)$$

式中: q 为外部荷载; q_u 为外部荷载的最大值。

由文献[27]可知, 为考虑涂抹效应对固结的影响, 采用3种径向渗透系数变化模式。当施工扰动较强且可近似考虑涂抹效应, 模式1认为涂抹区径向渗透系数不随 r 变化; 当施工扰动一般, 为更好地描述涂抹效应, 模式2认为涂抹区径向渗透系数沿 r 方向线性分布; 当施工扰动较小且涂抹比较大时, 模式3认为涂抹区径向渗透系数随 r 呈抛物线状变化。考虑涂抹作用后土体径向渗透系数 k_r 随 r 的变化可表达为 $k_r(r) = k_h f(r)$, 其中 $f(r)$ 为描述渗透系数随 r 变化的函数。其具体函数见图2, 其中 $k_r(r)$ 在 $r = r_w$ 处取最小值 k_s , 在 $r = r_e$ 处取最大值 k_h , 涂抹参数 $\delta = k_s / k_h$ 。

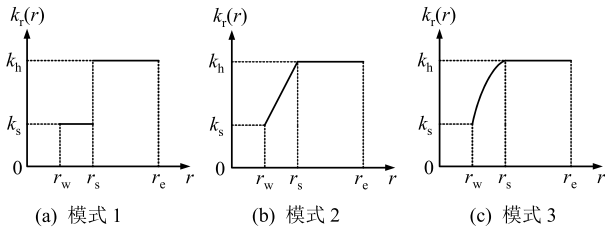


图2 涂抹区径向渗透系数的3种模式^[27]

Fig.2 Three variable patterns of radial permeability coefficient^[27]

3种模式在影响区 $r_s < r \leq r_e$ 范围内均取值 $f(r) = 1$; 而在涂抹区 $r_w < r \leq r_s$ 范围内, 当径向渗透系数变化为模式1时, 根据图2(a)可设

$$f(r) = \delta \quad (8)$$

当径向渗透系数变化为模式2时, 根据图2(b)可设

$$f(r) = \frac{r - r_w}{r_s - r_w} (1 - \delta) + \delta \quad (9)$$

当径向渗透系数变化为模式3时, 根据图2(c)可设

$$f(r) = (1 - \delta) \left(a_0 - b_0 + c_0 \frac{r}{r_w} \right) \left(a_0 - b_0 - c_0 \frac{r}{r_w} \right) \quad (10)$$

式中: $a_0 = \sqrt{\frac{1}{1 - \delta}}$, $b_0 = \frac{s}{s - 1}$, $c_0 = \frac{1}{s - 1}$, $s = \frac{r_s}{r_w}$ 。

土层竖向边界条件为

$$\bar{u}_s(0, t) = 0 \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial a} \right|_{a=H} = 0 \quad (12)$$

径向边界条件为

$$\left. \frac{\partial u_s}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0 \quad (13)$$

$$u_s|_{r=r_w} = u_w \quad (14)$$

式中: u_w 为竖井周围土体孔压。

初始条件为

$$\bar{u}_s(a, 0) = q(0) \quad (15)$$

式中: $q(0)$ 为初始时刻外荷载 q 的值。

整理式(7), 并利用边界条件式(13), 在式(7)两侧对 r 积分得

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{\gamma_w}{2k_h} \frac{r^2 - r_e^2}{rf(r)} \frac{I_c}{\sigma'_0} \frac{\sigma'_0}{\sigma'} \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (16)$$

可得边界条件为

$$\left. \frac{\partial u_s}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \frac{\gamma_w (1 - n^2)}{2k_h f(r_w)} \frac{I_c}{\sigma'_0} \frac{\sigma'_0}{\sigma'} \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (17)$$

式中: n 为井径比, $n = r_e / r_w$ 。将式(16)在区间 (r_w, r) 对 r 进行积分, 并引入边界条件(17), 可得土层任一点超静孔压表达为

$$u_s = \frac{\gamma_w [C_0(r) - r_e^2 B_0(r)]}{2k_h} \frac{I_c}{\sigma'_0} \frac{\sigma'_0}{\sigma'} \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (18)$$

式中: $B_0(r) = \int_{r_w}^r \frac{1}{xf(x)} dx$, x 为积分变量; $C_0(r) =$

$\int_{r_w}^r \frac{x}{f(x)} dx$ 。

将式(18)代入到平均超静孔压表达式(5)中, 可得任一深度处平均超静孔压为

$$u_w - \bar{u}_s = \frac{\gamma_w r_e^2 F_s}{2k_h} \frac{I_c}{\sigma'_0} \frac{\sigma'_0}{\sigma'} \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (19)$$

式中: F_s 为涂抹效应影响系数, 其表达式为

$$F_s = \frac{2(r_e^2 B_1 - C_1)}{r_e^2 (r_e^2 - r_w^2)} \quad (20)$$

式中: $B_1 = \int_{r_w}^{r_e} r B_0(r) dr$, $C_1 = \int_{r_w}^{r_e} r C_0(r) dr$ 。不同涂抹模式下根据对应的 $f(r)$ 表达式可计算得到相应的 F_s , 具体的 F_s 表达式可见文献[27]。

根据假定(5), 井周流量等于竖井流量增量的连续条件为

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k_w \frac{\partial u_w}{\partial \xi} \right) = - \frac{2k_h f(r_w)}{r_w} \frac{\partial u_s}{\partial r} \Big|_{r=r_w} \quad (21)$$

将式 (17) 代入式 (21), 可得

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1+e_0}{1+e} \frac{\partial u_w}{\partial a} \right) = - \frac{\gamma_w (1-n^2)}{k_w} \frac{I_c}{\sigma'_0} \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma'} \right)^{I_c+1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \right) \quad (22)$$

将式 (19) 和式 (4) 代入式 (22), 可得

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1+e_0}{1+e} \frac{\partial u_w}{\partial a} \right) = - \frac{2(1-n^2)k_{h0}}{r_c^2 F_s k_w} \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma'} \right)^{(\alpha+1)I_c} (u_w - \bar{u}_s) \quad (23)$$

式 (23) 即为竖井地基大应变非线性固结控制方程。

2.4 固结模型的解析解答

式 (23) 属于非线性偏微分方程, 如果不采用任何简化处理, 仍然无法获得其解析解答。本文采用与 Lekha 等^[7, 28]及 Indraratna 等^[8]相同的求解方法, 将控制方程式 (23) 转化为

$$\bar{u}_s = u_w - A \frac{\partial^2 u_w}{\partial a^2} \quad (24)$$

$$\text{式中: } A = \frac{k_w r_c^2 F_s}{2k_{h0}(n^2-1)} \left(\frac{2\sigma'_0 + q_u}{2\sigma'_0} \right)^{(\alpha+2)I_c}.$$

将式 (24) 代入式 (19) 可将控制方程转化为

$$A \frac{\partial^2 u_w}{\partial a^2} - B \frac{\partial u_w}{\partial t} + AB \frac{\partial^3 u_w}{\partial t \partial a^2} + B \frac{dq}{dt} = 0 \quad (25)$$

$$\text{式中: } B = \frac{\gamma_w r_c^2 F_s}{2k_{h0}} \frac{I_c}{\sigma'_0} \left(\frac{2\sigma'_0}{2\sigma'_0 + q_u} \right)^{1-I_c \alpha}.$$

参考谢康和等^[3]在瞬时荷载下所得竖井地基的固结解答及固结模型的边界条件, 可将控制方程的解答预设为

$$u_w = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \left(\frac{M}{H} a \right) \quad (26)$$

式中: T_m 为与时间 t 相关的指数函数; $M = (2m-1)\pi/2$, $m=1, 2, 3, \dots$ 。将式 (26) 代入式 (25) 可得平均超静孔压 $\bar{u}_s$ 形式:

$$\bar{u}_s = \left[1 + A \left(\frac{M}{H} \right)^2 \right] \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \left(\frac{M}{H} a \right) \quad (27)$$

将式 (27) 代入式 (25) 得

$$\sum_{m=1}^{\infty} T'_m(t) \sin \left(\frac{M}{H} a \right) + \beta_m \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \left(\frac{M}{H} a \right) = \frac{MQ_m}{2} \frac{dq}{dt} \quad (28)$$

式中: $\beta_m = \frac{A}{B} \frac{(M/H)^2}{1 + A(M/H)^2}$; $Q_m = \frac{2/M}{1 + A(M/H)^2}$; T'_m 为 T_m 的导数形式。

利用函数系 $\sin \frac{M}{H} z$ 在区间 $[0, H]$ 上的正交性可得

$$T'_m(t) + \beta_m T_m(t) = Q_m \frac{dq}{dt} \quad (29)$$

求解常微分方程式 (29), 可得

$$T(t) = e^{-\beta_m t} \left(\int_0^t Q_m \frac{dq}{d\tau} e^{\beta_m \tau} d\tau + D \right) \quad (30)$$

式中: D 为待定系数, 根据不同加载条件下不同的初始条件确定。将式 (30) 代入式 (27) 整理可得平均孔压的通解形式:

$$\bar{u}_s = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} I_m(t) \sin \left(\frac{M}{H} a \right) \quad (31)$$

式中: $I_m(t)$ 为不同外部荷载 $q(t)$ 下 $e^{-\beta_m t}$ 的函数。其孔压定义的径向平均固结度为

$$U_p = \frac{\int_0^H (q - \bar{u}_s) da}{\int_0^H q_u da} = \frac{q}{q_u} - \frac{2}{M^2} \frac{I_m(t)}{q_u} \quad (32)$$

进而可得 t 时刻土层的沉降值 S_t 为

$$S_t = \int_0^H 1 - \left(\frac{q_u + \sigma'_0 - \bar{u}_s}{\sigma'_0} \right)^{-I_c} da \quad (33)$$

将式 (31) 代入式 (33), 鉴于其形式复杂无法获得其显式表达, 只能借助于数值积分计算土层的沉降。将整个土层均匀分成 N 薄层, 记第 k 薄层 t 时刻顶面和底面处的径向平均孔压分别为 $\bar{u}_{sk}$ 和 $\bar{u}_{s(k+1)}$, 则其数值积分为

$$S_t = H - \frac{H}{2N} \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{q_u + \sigma'_0 - \bar{u}_{sk}}{\sigma'_0} \right)^{-I_c} + \left(\frac{q_u + \sigma'_0 - \bar{u}_{s(k+1)}}{\sigma'_0} \right)^{-I_c} \right] \quad (34)$$

土层的最终沉降 S_{∞} 为

$$S_{\infty} = H \left[1 - \left(\frac{q_u + \sigma'_0}{\sigma'_0} \right)^{-I_c} \right] \quad (35)$$

t 时刻整个土层按变形定义的径向平均固结

度 U_{rst} 为

$$U_{\text{rst}} = S_t / S_{\infty} \quad (36)$$

图 3 所示为外部荷载随时间变化图, q 的具体形式及其分别对应的 $I_m(t)$ 汇总于表 1。

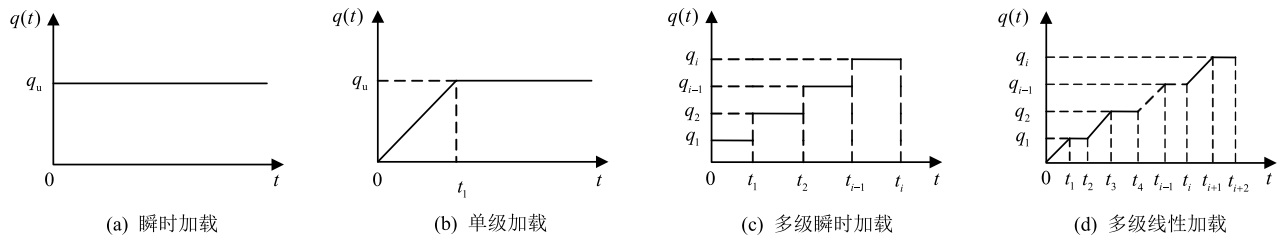


图 3 4 种变荷载加载模式

Fig.3 Four patterns of time-dependent surcharge loading

表 1 不同荷载模式下 q 和 $I_m(t)$ 的表达式

Table 1 Expressions of q and $I_m(t)$ under different load forms

加载形式	t 条件	q 表达式	$I_m(t)$ 表达式
瞬时加载	—	$q = q_u$	$I_m(t) = q_u e^{-\beta_m t}$
单级加载加载段	$t \leq t_1$	$q = \frac{q_u}{t_1} t$	$I_m(t) = \frac{q_u}{t_1 \beta_m} (1 - e^{-\beta_m t})$
单级加载持荷段	$t > t_1$	$q = q_u$	$I_m(t) = \frac{q_u}{t_1 \beta_m} (e^{-\beta_m(t-t_1)} - e^{-\beta_m t})$
多级瞬时加载第 i 阶段	$t_{i-1} < t \leq t_i$	$q = q_i$	$I_m(t) = \sum_{j=1}^i (q_j - q_{j-1}) e^{-\beta_m(t-t_{j-1})}$
多级线性加载第 i 阶段加载段	$t_{2i-2} < t \leq t_{2i-1}$	$q = \frac{q_i - q_{i-1}}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} (t - t_{2i-2}) + q_{i-1}$	$I_m(t) = \frac{1}{\beta_m} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j - q_{j-1}}{t_{2j-1} - t_{2j-2}} (e^{-\beta_m(t-t_{2j-1})} - e^{-\beta_m(t-t_{2j-2})}) + \frac{q_i - q_{i-1}}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} (1 - e^{-\beta_m(t-t_{2i-1})}) \right]$
多级线性加载第 i 阶段持荷段	$t_{2i-1} < t \leq t_{2i}$	$q = q_i$	$I_m(t) = \frac{1}{\beta_m} \sum_{j=1}^i \frac{q_j - q_{j-1}}{t_{2j-1} - t_{2j-2}} (e^{-\beta_m(t-t_{2j-1})} - e^{-\beta_m(t-t_{2j-2})})$

注：式中 i 为第 i 个加载阶段，其值为 1, 2, 3, ...; q_i 为第 i 个加载阶段的最大值；下标 j 为 $[1, i]$ 区间内任意一个加载阶段。

3 解析解的对比验证

3.1 与大应变非线性固结数值解对比

文献[27]建立了考虑井阻效应以及径向渗透系数变化的竖井地基大应变非线性固结模型，文献[19]建立考虑井阻随时空变化的竖井地基大应变非线性固结模型，均通过有限差分法获得其数值解。为了验证本文解析解计算大应变非线性问题的可靠性，将本文解析解计算结果与上述二者在常井阻工况下的数值计算结果开展对比分析。计算参数见表 2，其中参数 I_c 和 α 取值由半对数模型中压缩系数 C_c 、渗透系数 C_k 值确定而得^[23]。图 4 为本文解析解计算

的竖井地基平均固结度与数值解结果的对比分析，其中 T_h 为无量纲时间因子，表达为 $T_h = C_h t / (4r_c^2)$ ， C_h 为径向固结系数，表达为 $C_h = k_h \bar{\sigma}'_0 / (\gamma_w I_c)$ 。

从图 4 可以看出，本文解析解得到的固结度随时间变化曲线与文献[27]数值解吻合较好，而与文献[19]基本吻合，且误差在 5% 及以下。出现误差的主要原因是本文解析解求解过程中简化与 Lekha 等^[7, 28]相同，同时数值解也考虑了土中竖向渗流对固结的影响。尽管两者存在一定偏差，但必须看到，一方面这种偏差能被工程所接受，更为重要的是本文的解析解相比数值解答，其在实际应用中更方便简易。

表 2 竖井地基计算参数

Table 2 Calculation parameters for soils with vertical drain

工况	H / m	r_c / m	r_s / m	r_w / m	k_{h0} / (m · s ⁻¹)	k_w / (m · s ⁻¹)	δ	q_u / kPa	σ'_0 / kPa	e_0	I_c	α
图4文献[19]数值解	10	0.625	0.062 5	0.031 25	4×10^{-8}	4×10^{-4}	0.40	100.00	50	2.1	0.124 5	6.425
图4文献[27]数值解	5	0.700	0.280 0	0.070 00	4×10^{-8}	4×10^{-4}	0.20	100.00	10	3.0	0.124 5	6.425
图5文献[29]解析解	10	0.700	0.280 0	0.070 00	2×10^{-8}	1×10^{-4}	0.25	0.01	25	1.5	0.124 5	6.425

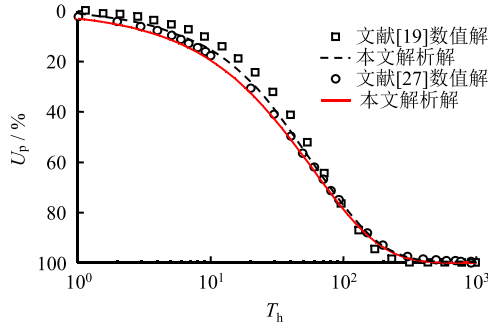


图4 本文解析解与常井阻数值解的对比

Fig.4 Comparisons between proposed solution and nonlinear large-strain numerical solution

3.2 与小应变线性固结解析解对比

由文献[24]可知, 土体大应变非线性径向固结

系数 $C_h = C_{h0} \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma'} \right)^{I_c(a-2)-1}$, 其中 C_{h0} 为初始径向固结

系数。当作用在土层的外荷值较小, 如 $q_u = 0.01$ kPa 时, C_h 可视为常数, 此时非线性固结中土体压缩和渗透性可近似被认为不发生变化, 得到的非线性固结解析解与在小应变假定下线性固结解析解应基本相同。因此, 在应力增量极小的状态下, 将计算结果与江文豪等[29]径向渗流下忽略时间变井阻影响的竖井地基固结解析解对比验证, 计算参数见表2。

从图5中可看出, 本文解答得到的平均孔压固结曲线与在小应变线性假设条件下江文豪等[29]解析解固结曲线高度吻合, 是由于文献[29]的解是本文解的特殊情况, 因为当文献[29]的解忽略井阻变化对砂井地基固结速率的影响, 在相同的参数条件下, 本文解的固结度曲线能与其高度吻合, 但由于采用不同的软土本构模型, 所以本文解无法从显式上退化到文献[29]的解。综上所述, 可以说明本文解答的可靠性及可应用性。

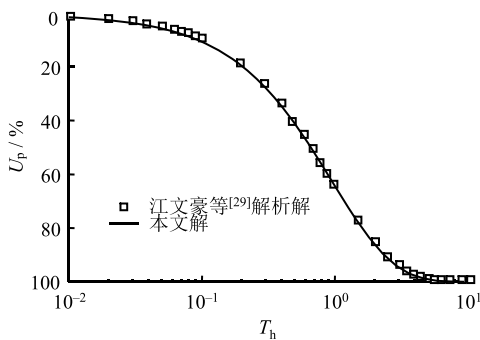


Fig.5 本文解析解与常井阻小应变解析解的对比

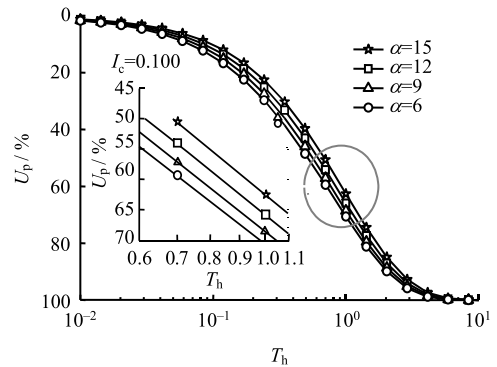
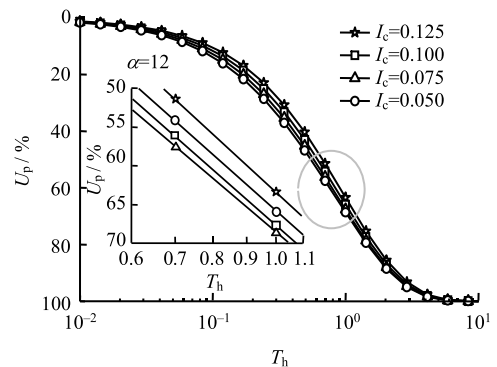
Fig.5 Comparisons between proposed solution and linear small-strain solution

4 固结性状分析

为研究土体双对数压缩和渗透模型对竖井地基固结性状的影响, 采用以下土体参数对竖井地基固结性状开展分析: $H = 10$ m, $r_w = 0.03125$ m, $r_s = 0.125$ m, $r_c = 0.625$ m, $e_0 = 1.57$, $\sigma'_0 = 39$ kPa, $k_{h0} = 8 \times 10^{-8}$ m/s, $k_w = 4 \times 10^{-4}$ m/s, 涂抹模式为模式1, $\delta = 1$, $\gamma_w = 10$ kN/m³, 土的有效重度 $\gamma' = 7.8$ kN/m³, 土层顶部透水, 底面不透水。

4.1 参数 I_c 和 α 对固结形状的影响

土体压缩和渗透特性的变化会引起土体固结速率随之发生变化。分两种情况讨论两者对竖井地基固结度以及孔压消散的影响: 第1种情况是 I_c 不变, 探究 α 对固结性状的影响; 第2种情况是 α 不变, 讨论不同 I_c 下固结性状的变化。以 I_c 和 α 的常见值 $I_c = 0.1$ 和 $\alpha = 12$ 为例, $I_c = 0.1$ 时, 讨论 α 分别等于 15、12、9、6 对固结性状的影响; $\alpha = 12$ 时, 讨论 I_c 分别等于 0.125、0.100、0.075、0.050 对固结性状的影响。图6和图7为这两种情况下按孔压定义的平均固结度 U_p 随时间变化的曲线。

图6 不同 α 下平均固结度 U_p 与 T_h 关系曲线Fig.6 Curves of average consolidation degree U_p versus T_h under different α values图7 不同 I_c 下平均固结度 U_p 与 T_h 关系曲线Fig.7 Curves of average consolidation degree U_p versus T_h under different I_c values

从图 6 和图 7 中不难发现, I_c 为定值时 U_p 随 α 的减小而增大。这表明土层的渗透性越强, 其固结速率越快。同理, α 为定值时, 同一时刻 U_p 随 I_c 的减小而增大。 I_c 的减小对应的是土体压缩模量的增大, 这与土层压缩模量越大其固结速率越快的事实相符。另外, 由图 6 和图 7 可知, I_c 和 α 对固结度的参数局部敏感度不同, 例如在 $T_h = 0.8$ 处, 图 6 中固结度的差值为 3.33%、2.97% 和 2.51%, 而图 7 中同时刻下固结度的差值为 2.72%、2.19% 和 1.61%, 这说明 α 的参数局部敏感度更高, 其变化对固结性状的影响更为明显。

4.2 外荷载对固结性状的影响

根据文献[24]对天然软土地基而言, $I_c(\alpha-2) > 1$ 时, 土层固结速率随外荷载的增加而减小; $I_c(\alpha-2) = 1$ 时, 土层固结速率基本不受外荷载变化的影响; 而 $I_c(\alpha-2) < 1$ 时, 天然地基固结速率随外荷载的增大而加快。其主要原因在于 $I_c(\alpha-2) = 1$ 时,

土体的大应变固结系数在固结过程中并不受外荷载的影响, 其固结速率自然也不会随着外荷载的变化而变化。对竖井地基而言, 如图 8 所示, 在 $I_c(\alpha-2)$ 的 3 种取值下竖井地基固结速率均随着外荷载的增大而加快, 且不同荷载间固结度之差会随着 $I_c(\alpha-2)$ 取值增大而减小。这种差异的出现可以由控制方程式 (24) 中系数 A 解释, 文献[24]给出了大量软土 I_c 与 α 的取值分布, 在此范围内式 (24) 中 $I_c(\alpha+2)$ 均大于 0, 所以在土体压缩渗透性参数不变的情况下, 参数 A 会随着外荷载的增大而变大, 故超静孔隙水压力的消散速率加快, 在固结性状上体现为固结速率随外荷载的增加而加快。基于文献[13], 双对数模型下软土地基与竖井地基固结特性差异与半对数模型下完全相符, 从而说明外荷载为对天然地基和竖井地基非线性固结特性的影响是完全一致的, 与采用哪种关系描述土体的非线性特性无关。

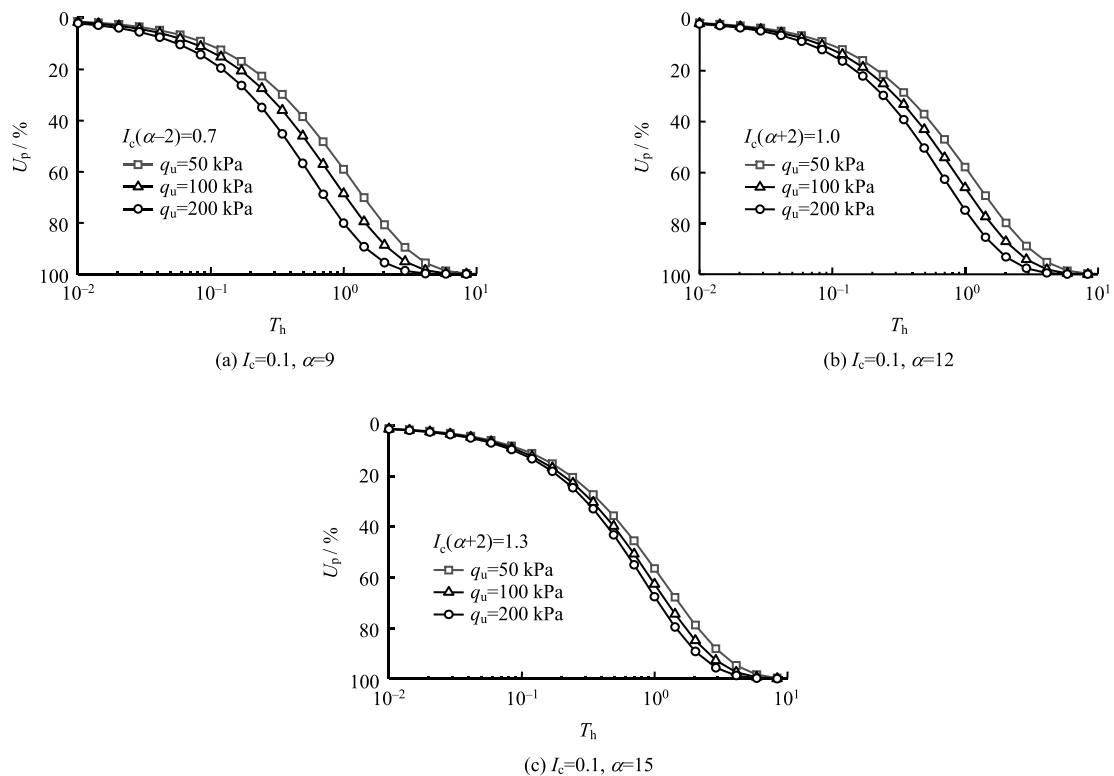


图 8 外荷载对竖井地基固结速率的影响

Fig.8 Influences of surcharge loading on consolidation rate of soils with vertical drains

4.3 井径比对固结形状的影响

图 9 为不同 $I_c(\alpha-2)$ 值下井径比 n (影响区半径与竖井半径之比) 对竖井地基固结速率的影响。可以发现, 随着井径比的增大, 竖井地基固结速率减慢。当井径比较大时, $I_c(\alpha-2)$ 的变化对固结速

率的影响更大。例如, 当固结度达到 90% 时, 在井径比 $n = 10$ 时, 不同 $I_c(\alpha-2)$ 对应的 T_h 差分别为 0.07、0.08; 而在 $n = 20$ 时, 不同参数值下的差值分别为 0.11、0.12。因此, 实际地基处理设计如果采用的竖井间距较大时, 在竖井地基固结计算中十分

有必要考虑软土压缩渗透非线性对竖井地基固结的影响，从而获得相对准确的固结计算。相反，如果是井径比相对较小，忽略土体非线性影响对固结完成时间的预估误差影响不大。

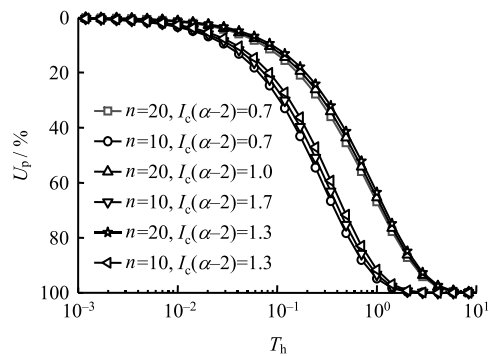


图9 井径比 n 对 U_p - T_h 曲线的影响
Fig.9 Influences of n on U_p - T_h curves

5 工程实例

深港西部通道口岸区域内的填海地基工程采用了竖井地基排水固结技术进行改良处理。此项工程专门针对厚度介于 5~20 m 之间的海洋沉积型淤泥软土层，采取了“塑料排水板配合堆载预压”的综合性加固策略以改善地基条件。根据文献[30]取土体物理力学参数如表 3 所示。 I_c 根据文献[30]中给出的 $\lg(1+e_0)$ 、 $\lg \sigma'_0$ 和 C_c 通过拟合而获得； α 则由文献[30]中给出的 $1+e_0$ 、 k_{h0} 及 C_k 通过拟合而得到， I_c 和 α 具体数值见表 3。该工程加载模式符合文中多级线性加载，即如图 3(d)所示的加载模式，其具体加载过程曲线如图 10 所示。利用该模式下本文所获得的竖井地基大应变非线性固结解析解对地基开展固结计算，计算结果与工程实测数据如图 10 所示。

表 3 竖井地基计算参数

Table 3 Calculation parameters for consolidation of soils with vertical drains

H / m	r_e / m	r_s / m	α	k_{h0} / (m · s ⁻¹)	k_w / (m · s ⁻¹)	q_u / kPa	C_c	σ'_0 / kPa	e_0	I_c	C_k
6	0.472 5	0.035	6.726	3.23×10^{-8}	3.21×10^{-9}	210	0.741	25	2.359	0.099	1.112 8

图 10 为深港工程中多级加载递增下实测数据与本文解、Liu 等^[30]解析解以及李阔等^[19]数值解计算结果的对比分析。由图中曲线对比可得，Liu^[30]、李阔^[19]等的计算结果在固结过程中在加载阶段对实时沉降固结度的预测偏差较大，这是因为本文解答采用多级加载方式，而前者均采用瞬时加载。用双对数模型描述土体压缩渗透关系所得的理论预测曲线则可以在固结全过程，尤其是中后期（180 d 以后）与实测值十分吻合，体现了本文理论在工程实际中开展固结沉降预测显示的优势。

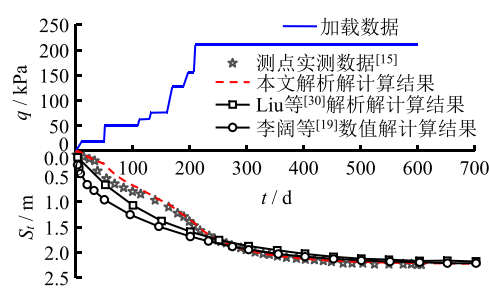


图 10 不同方法计算的地基沉降值及实测值
Fig.10 Comparisons of settlement between measured data and calculated results by different methods

6 结 论

本文获得了多种加载模式下竖井地基大应变非

线性固结解析解。将本文解析解与相同工况下已有的数值解对比分析，验证了本文解析解的可靠性。在分析固结性状的基础上将本文解答应用于实际算例，进一步说明了本文解的实用性。

(1) 从工程实践出发，本文解形式简单，方便工程应用，且与复杂的数值计算相比，其可靠性亦有保证。

(2) I_c 一定时，土层的固结速率和超静孔压消散速率随 α 减小而加快； α 一定时，土层的固结速率和底部超静孔压消散速率随 I_c 减小而加快，即土体压缩模量越大、渗透性越好，竖井内孔压消散速率和固结速率亦越快。

(3) 与天然地基固结性状不同，外荷载对竖井地基固结速率的影响规律并不会随着 $I_c(\alpha-2)$ 的值发生明显改变。

(4) 无论 $I_c(\alpha-2)$ 值如何变化，井径比的增大将使竖井地基固结速率减慢。当井径比较大时， $I_c(\alpha-2)$ 的变化对固结速率的影响更大。

参 考 文 献

[1] BARRON R A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells[J]. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1948, 113: 718-754.
[2] HANSBO S, JAMIOLKOWSKI M, KOK L. Consolidation

- by vertical drains[J]. **Géotechnique**, 1981, 31(1): 45-66.
- [3] 谢康和. 砂井地基: 固结理论、数值分析与优化设计[D]. 杭州: 浙江大学, 1989.
- XIE Kang-he. Sand foundation: consolidation theory, numerical analysis and optimization design[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1989.
- [4] 刘加才, 蔡南树, 施建勇, 等. 成层竖向排水井地基固结分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(8): 1247-1252
- LIU Jia-cai, CAI Nan-shu, SHI Jian-yong, et al. Analysis of consolidation of layered ground with vertical drain[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(8): 1247-1252.
- [5] 刘忠玉, 徐传永, 朱新牧, 等. 考虑非 Darcy 渗流的砂井地基弹黏塑性固结分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, 53(5): 113-122.
- LIU Zhong-yu, XU Chuan-yong, ZHU Xin-mu, et al. Elasto-viscoplastic consolidation analysis of ground with sand drains considering non-Darcian flow[J]. **Journal of Harbin Institute of Technology**, 2021, 53(5): 113-122.
- [6] BASAK P, MADHAV R. Analytical solutions of sand drain problems[J]. **Journal of Geotechnical Engineering Division**, 1978, 104(1): 129-135.
- [7] LEKHA K R, KRISHNASWAMY N R, BASAK P. Consolidation of clays for variable permeability and compressibility[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2003, 129(11): 1001-1009.
- [8] INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C, SATHANAN THAN I. Radial consolidation of clay using compressibility indices and varying horizontal permeability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2005, 42(5): 1330-1341.
- [9] 郭彪, 韩颖, 龚晓南, 等. 考虑横竖向渗流的砂井地基非线性固结分析[J]. 深圳大学学报(理工版), 2010, 27(4): 459-463.
- GUO Biao, HAN Ying, GONG Xiao-nan, et al. Nonlinear consolidation behavior of sand foundation with both horizontal and vertical drainage[J]. **Journal of Shenzhen University (Science and Engineering)**, 2010, 27(4): 459-463.
- [10] 张玉国, 万东阳, 郑言林, 等. 考虑径向渗透系数变化的真空预压竖井地基固结解析解[J]. 岩土力学, 2019, 40(9): 3533-3541.
- ZHANG Yu-guo, WAN Dong-yang, ZHENG Yan-lin, et al. Analytical solution for consolidation of vertical drain under vacuum preloading considering the variation of radial permeability coefficient[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(9): 3533-3541.
- [11] LU M, WANG S, SLOAN S W, et al. Nonlinear consolidation of vertical drains with coupled radial-vertical flow considering well resistance[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 2015, 43(2): 182-189.
- [12] 许滨华, 何宁, 周彦章, 等. 基于谱方法的层状竖井地基非线性固结计算模型[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(10): 1781-1788.
- XU Bin-hua, HE Ning, ZHOU Yan-zhang, et al. Nonlinear consolidation model for stratified soils with vertical drains based on spectral method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(10): 1781-1788.
- [13] 王洁, 李传勋, 郭霄, 等. 考虑井阻时空变化的竖井地基非线性固结解析解[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2828-2840.
- WANG Jie, LI Chuan-xun, GUO Xiao, et al. Analytical solution for nonlinear consolidation of soft soil with vertical drains by considering time- and depth-variation of well resistance[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(10): 2828-2840.
- [14] GIBSON R E, ENGLAND G L, HUSSEY M J. The theory of one-dimensional soil consolidation of saturated clays, I. finite nonlinear consolidation of thin homogeneous layers[J]. **Géotechnique**, 1967, 17(3): 261-273.
- [15] 江辉煌, 赵有明, 刘国楠, 等. 砂井地基的大变形固结[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(2): 302-308.
- JIANG Hui-huang, ZHAO You-ming, LIU Guo-nan, et al. Large strain consolidation of soft ground with vertical drains[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(2): 302-308
- [16] 张明, 王威, 刘起霞, 等. 考虑幂函数渗透压缩变化的双层砂井地基固结性状[J]. 岩土力学, 2013, 34(11): 3117-3126.
- ZHANG Ming, WANG Wei, LIU Qi-xia, et al. Consolidation behaviors of double-layered vertical drains ground considering power function permeability and compressibility variation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(11): 3117-3126.
- [17] 曹玉鹏, 孙宗军, 丁建文, 等. 高含水率疏浚泥轴对称大应变固结模型[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(10): 1904-1910.
- CAO Yu-peng, SUN Zong-jun, DING Jian-wen, et al. Axisymmetric large-strain consolidation model for dredged clay with high water content[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(10): 1904-1910.

- 1904-1910.
- [18] NGUYEN B P, KIM Y T. Radial consolidation of PVD-Installed normally consolidated soil with discharge capacity reduction using large-strain theory[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 2019, 47(2): 243-254.
- [19] 李阔, 李传勋. 考虑井阻随时空变化的竖井地基大应变非线性固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(增刊 1): 1-12.
- LI Kuo, LI Chuan-xun. A numerical solution for nonlinear large-strain consolidation of soils with vertical drains by considering time-and depth-dependent well resistance[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2023, 42(Suppl.1): 1-12.
- [20] 王军, 蔡袁强, 符洪涛, 等. 新型防淤堵真空预压法室内与现场试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(6): 1257-1268.
- WANG Jun, CAI Yuan-qiang, FU Hong-tao, et al. Indoor and field experiment on vacuum preloading with new anti-clogging measures[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(6): 1257-1268.
- [21] BUTTERFIELD R. A natural compression law for soils (an advance on e -lg p')[J]. **Geotechnique**, 1979, 29(4): 469-480.
- [22] 曾玲玲, 洪振舜, 陈福全. 压缩过程中重塑黏土渗透系数的变化规律[J]. 岩土力学, 2012, 33(5): 1286-1292.
- ZENG Ling-ling, HONG Zhen-shun, CHEN Fu-quan. A law of change in permeability coefficient during compression of remolded clays[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(5): 1286-1292.
- [23] 谢康和, 齐添, 胡安峰, 等. 基于 GDS 的黏土非线性渗透特性试验研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(2): 420-424.
- XIE Kang-he, QI Tian, HU An-feng, et al. Experimental study on nonlinear permeability of Xiaoshan clay[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(2): 420-424.
- [24] 仇超, 李传勋, 李红军. 单级等速加载下高压缩性软土非线性大应变固结解析解[J]. 岩土力学, 2021, 42(8): 2195-2206.
- QIU Chao, LI Chuan-xun, LI Hong-jun. Analytical solutions for one-dimensional nonlinear large-strain consolidation of high compressible soil under a ramp loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(8): 2195-2206.
- [25] ORLEACH P. Technique to evaluate the field performance of vertical drains[D]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1983.
- [26] INDRARATNA B, ZHONG R, FOX P, et al. Large strain vacuum-assisted consolidation with non-Darrian radial flow incorporating varying permeability and compressibility[J]. **Journal of Geotechnical Geoenvironmental Engineering**, 2017, 143(1): 04016088.
- [27] 江文豪, 詹良通. 考虑井阻效应及径向渗透系数变化下砂井地基的大变形固结[J]. 岩土力学, 2021, 42(3): 755-766.
- JIANG Wen-hao, ZHAN Liang-tong. The large strain consolidation of sand-drained ground considering the well resistance and the variation of radial permeability coefficient[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(3): 755-766.
- [28] LEKHA K R, KRISHNASWAMY N R, BASAK P. Consolidation of clay by sand drain under time-dependent loading[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1998, 124(1): 91-94.
- [29] 江文豪, 詹良通, 杨策, 等. 考虑井阻随时间变化及径向渗流下砂井地基固结的解析解及其分析[J]. 工程力学, 2021, 43(6): 218-226, 256.
- JIANG Wen-hao, ZHAN Liang-tong, YANG Ce, et al. Analytical solution and analysis for consolidation of sand drained ground considering the time-dependent well resistance and radial vertical flow[J]. **Engineering Mechanics**, 2021, 43(6): 218-226, 256.
- [30] LIU S J, SUN H L, PAN X D, et al. Analytical solutions and simplified design method for large-strain radial consolidation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2021, 134(118): 103987.